

М. Л. Герман, П. С. Гринчук

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННОГО ПОКРЫТИЯ "КЕРАМИЧЕСКИЕ МИКРОСФЕРЫ-СВЯЗУЮЩЕЕ"

Предложена математическая модель, позволяющая рассчитать теплозащитные свойства композиционного покрытия "керамические микросферы-связующее", в которой учитываются оптические и теплофизические свойства компонентов, а также оптические свойства подложки. Показано, что за счет подавления данным покрытием радиационной составляющей тепловых потерь их уменьшение может достигать более 50%. При определенных условиях теплоизоляционный эффект может отсутствовать или даже инвертироваться, т. е. наличие покрытия способно приводить к возрастанию теплового потока с ограждаемой поверхности. Сравнение данных проведенного натурного эксперимента и расчетов, выполненных на основе предложенной модели, показало, что последняя адекватно отражает реальный процесс теплопереноса и может использоваться для расчета теплозащитных свойств покрытий, представляющих собой компаунд из связующего и керамических микросфер.

**Введение.** Сегодня в ряде стран для дополнительной теплозащиты зданий различного функционального назначения применяется покрытие, состоящее из полых либо сплошных керамических (или стеклянных) микросфер с характерным размером порядка 10–50 мкм, перемешанных с акриловой краской. После высыхания оно имеет толщину порядка 0.3 мм и состоит из нескольких рядов микросфер, связанных тонкой акриловой пленкой. Покрытие отличается простой технологией нанесения и, как указывают его производители, позволяет снизить тепловые потери не менее, чем на 30%, обладает достаточно высокой паропроницаемостью и низкой смачиваемостью. Однако вопрос о влиянии тех или иных свойств покрытия и подложки на эффективность теплоизоляции до сих пор остается открытым.

**Математическая формулировка задачи радиационно-кондуктивного теплопереноса в слое компаунда, состоящего из полых керамических микросфер и связующего.** Рассмотрим нанесенный на наружную поверхность некоторой стены слой компаунда толщиной  $H$ , состоящего из связующего и полых керамических микросфер (рис. 1).

Тепловые потери с поверхности компаунда состоят из кондуктивного, конвективного (потери за счет омывания поверхности окружающим воздухом) и радиационного (за счет "пересвечивания" стенки с поверхностью земли и небосводом) компонентов. При этом критерием эффективности теплозащитного покрытия может служить только величина теплового потока с его поверхности, а не температура последней. Пусть наружная поверхность рассматриваемой стены имеет температуру  $T_w$  и полусферическую излучательную способность  $\epsilon_w$ . Будем считать заданными: 1) температуру окружающего воздуха  $T_a$ ; 2) температуру поверхности земли  $T_g$ , принимаем  $T_g = T_a$ ; 3) эффективную радиационную температуру небосвода  $T_r$ . При облачной погоде  $T_r$  ночного небосвода полагается равной 250 К, а при ясном небе  $T_r = 100$  К [1]. Полусферическая излучательная способность окружающей атмосферы принимается равной  $\epsilon_a = 1$ . При отсутствии слоя компаунда плотность потока тепловых потерь с поверхности стены определяется потерями за счет конвекции и теплового излучения [1]

$$q_0 = q_{0\text{conv}} + q_{0r} = \alpha (T_w - T_a) + \epsilon_w \sigma_* (T_w^4 - T_{r,g}^4), \quad (1)$$

где  $\sigma_*$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $T_{r,g}^4 = (T_g^4 + T_r^4)/2$ ,  $T_{r,g}$  – средняя радиационная температура окружающей среды. При отсутствии ветра, т. е. для режима свободной конвекции, коэффициент конвективной теплоотдачи с поверхности можно рассчитать по следующей формуле [2]:

$$\alpha = \frac{\lambda'_a}{L} \left[ 0.825 + \frac{0.38 \text{ Ra}^{1/6}}{[1 + (0.492/\text{Pr})^{9/16}]^{8/27}} \right]^2, \quad (2)$$

где  $\text{Ra} = \text{Pr} \text{ Gr}$  – критерий Релея, выраженный через число Грасгофа  $\text{Gr} = g\beta_V L^3 (T_w - T_a)/\nu_a^2$  и число Прандтля  $\text{Pr} = \nu_a/\alpha'_a$ . Здесь  $\lambda'_a$ ,  $\nu_a$  и  $\alpha'_a$  – соответственно коэффициент теплопроводности, кинематическая вязкость и коэффициент температуропроводности воздуха, которые определяются из таблиц [2] для его средней температуры у стенки  $\langle T \rangle = (T_w + T_a)/2$ , а  $\beta_V = 1/\langle T \rangle$  – коэффициент объемного расширения воздуха.

Для учета влияния слоя компаунда на величину тепловых потерь с поверхности стены необходимо знание распределения температуры в компаунде и параметров, характеризующих перенос излучения в нем.

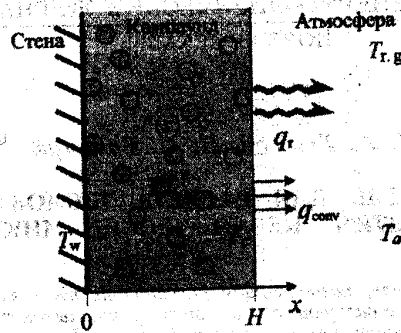


Рис. 1. Схема расчета теплового режима слоя компаунда

В стационарном случае температурное поле внутри слоя компаунда определяется одномерным (в силу малой толщины слоя) уравнением энергии [3]

$$\lambda_c \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = \text{div } Q_r(x), \quad x \in [0, H]. \quad (3)$$

Здесь  $\text{div } Q_r$  представляет собой плотность объемных радиационных источников тепла в слое компаунда. Граничные условия для (3) отражают особенности теплообмена на каждой поверхности слоя. На прилегающей к стене поверхности ( $x = 0$ ) вследствие плотного прилипания компаунда к стене имеем

$$T(0) = T_w. \quad (4)$$

В силу того, что компаунд является полупрозрачным для инфракрасного (ИК) излучения и радиационный поток на его поверхности формируется как внутренними слоями, так и тепловым излучением поверхности стены (т. е. перенос тепла излучением имеет место одновременно с кондуктивным теплопереносом и их взаимное влияние определяется величиной  $\text{div } Q_r(x)$ ), на противоположной стороне слоя ( $x = H$ ) задается только плотность конвективного теплового потока

$$q_{\text{conv}} = -\lambda_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=H} = \alpha (T|_{x=H} - T_a). \quad (5)$$

Плотность источников излучения  $\text{div } Q_r(x)$  определяется из решения уравнения переноса излучения, которое при условии локального термодинамического равновесия имеет вид [4]

$$\mu \frac{dI_\lambda(x, \mu)}{dx} + (\chi_\lambda + \sigma_\lambda) I_\lambda(x, \mu) = \chi_\lambda B_\lambda(T) + \frac{\sigma_\lambda}{2} \int_{-1}^1 p_\lambda(\mu, \mu') I_\lambda(x, \mu') d\mu', \quad (6)$$

где  $B_\lambda(T) = \frac{c_1 n_1^2}{\pi \lambda^5 (\exp(c_2/\lambda T) - 1)}$  — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре  $T$  в связующей среде с показателем преломления  $n_b = n_1 - i n_2$  ( $c_1 = 3.741832 \cdot 10^{-16}$  Вт·м<sup>2</sup>,  $c_2 = 1.438786 \cdot 10^{-2}$  м·К),  $\mu = \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ). Тогда дивергенция лучистых потоков в каждой точке среды определяется следующим соотношением [5]:

$$\text{div } Q_r(x) = 2\pi \int_0^\infty \chi_\lambda \left( 2B_\lambda T(x) - \int_{-1}^1 I_\lambda(x, \mu) d\mu \right) d\lambda. \quad (7)$$

Граничные условия для уравнения переноса излучения, учитывающие процессы отражения и излучения на границах слоя компаунда, существенно отличаются для левой и правой границ. Это связано с тем, что правая граница ( $x = H$ ) пропускает внутрь падающее на нее из окружающей среды излучение  $B_\lambda(T_{g,g})$ , а левая граница (стена,  $x = 0$ ) является, как правило, диффузно отражающей и излучающей. В этом случае граничные условия для падающего излучения имеют вид [6]

$$I_\lambda(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} = \varepsilon_w B_\lambda(T_w) + 2(1 - \varepsilon_w) \int_0^{-1} I_\lambda(0, \mu') d\mu', \quad I_\lambda(H, \mu) \Big|_{\mu < 0} = B_\lambda(T_{g,g}). \quad (8)$$

Плотность результирующего радиационного потока с поверхности слоя компаунда определяется по рассчитанному согласно (6) и (8) полю интенсивностей излучения  $I_\lambda(x, \mu)$  следующим образом [6]:

$$q_r = \pi \int_0^{\infty} \left( 2 \int_0^1 I_{\lambda}(H, \mu) \mu d\mu - B_{\lambda}(T_{r,g}) \right) d\lambda. \quad (9)$$

Таким образом, математическая модель для определения тепловых потерь в окружающее пространство с поверхности стены, покрытой слоем компаунда, обладающего поглощательными, излучательными и рассеивающими свойствами, описывается соотношениями (3)–(9). При этом плотность потока тепловых потерь представляет собой сумму конвективных и радиационных потерь с поверхности, определяемых соответственно из (5) и (9)

$$q = q_{\text{conv}} + q_r. \quad (10)$$

Алгоритм решения поставленной задачи следующий:

1. Задаются начальные температурные условия –  $T_w, T_a, T_{r,g}$ ;
2. Задается коэффициент теплопроводности  $\lambda_c$  слоя компаунда. По литературным данным [7] его средняя величина равна  $\lambda_c = 0.12$  Вт/(м·К);
3. Рассчитываются спектральные оптические свойства ( $\chi_{\lambda}, \sigma_{\lambda}$  и  $\rho_{\lambda}$ ) компаунда (ниже будет приведено описание методики расчета) в диапазоне длин волн  $\lambda = 0.3\text{--}100$  мкм, в котором сосредоточена большая часть энергии видимого и ИК излучений. В этом же диапазоне задается значение  $\epsilon_w$ , которое известно для большинства материалов [8];
4. В первом приближении полагается, что  $T(x) = T_w$  и  $\text{div } \mathbf{Q}_r(x) = 0$  во всех точках компаунда. Далее по уравнениям (1), (2) вычисляются плотности конвективного  $q_{0\text{conv}}$  и радиационного  $q_{0r}$  потоков тепла без учета слоя компаунда и делается предположение о том, что плотности потоков радиационных и конвективных тепловых потерь с поверхности компаунда соответственно равны  $q_{\text{conv}} = q_{0\text{conv}}$  и  $q_r = q_{0r}$ ;
5. Находится распределение температуры  $T(x)$  в компаунде из уравнения теплопроводности (3) с граничными условиями (2), (4) и (5). Из (5) с учетом (2) вычисляется плотность потока конвективных потерь  $q_{\text{conv}}$  с поверхности исходя из нового распределения температуры в нем;
6. В указанном выше спектральном диапазоне решается уравнение переноса излучения (6) с граничными условиями (8), а затем рассчитываются  $\text{div } \mathbf{Q}_r(x)$ , согласно (7), и плотность радиационного потока  $q_r$  с поверхности компаунда из (9);
7. Вычисляется точность совпадения плотностей конвективного и радиационного потоков, соответствующих двум последовательным итерациям. Если она превышает заданную, то расчет повторяется, начиная с пункта 5. В противном случае расчет заканчивается вычислением суммарной плотности потока тепла  $q$  с поверхности компаунда согласно (10).

Представленный алгоритм является замкнутым и позволяет рассчитать характеристики радиационно-кондуктивного теплообмена стены, покрытой компаундом из полых керамических микросфер и связующего, с окружающим пространством.

**Методика решения уравнения теплопроводности в слое компаунда.** В настоящее время известно большое число численных методов решения уравнения теплопроводности (3) с граничными условиями (4), (5), из которых к наиболее часто используемым относятся методы конечных элементов [9] и конечных разностей [10]. В данной работе предпочтение отдано первому методу.

Не останавливаясь подробно на особенностях самого метода, отметим лишь, что после дискретизации пространства от уравнения теплопроводности мы приходим к системе линейных уравнений для значений температуры в узлах расчетной сетки. Поскольку вектор в правой части указанной системы зависит от температуры поверхности компаунда  $T(H)$  согласно (5), необходима организация итерационного процесса для последовательного уточнения температуры и плотности конвективного потока  $q_{\text{conv}}$ . В связи с этим алгоритм решения уравнения (3) с граничными условиями (2), (4) и (5) выглядит следующим образом:

1. В первом приближении полагается, что температура в слое компаунда однородна и равна температуре стенки  $T(x) = T_w$ ;
2. По заданной температуре поверхности компаунда  $T_c = T(H)$  из (2) вычисляется коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ , а из (5) – плотность теплового потока на свободной поверхности компаунда  $q_{\text{conv}}$ ;
3. Вычисляются коэффициенты системы линейных уравнений с учетом известных величин  $q_{\text{conv}}$  и  $\text{div } \mathbf{Q}_r(x)$  и после ее решения определяется новое распределение температуры в компаунде  $T(x)$ ;
4. Находится точность совпадения температурного поля в компаунде для последовательных итераций. Если эта точность превышает заданную, то расчет повторяется, начиная с пункта 2. В противном случае расчет оканчивается вычислением плотности потока тепла  $q_{\text{conv}}$  с поверхности компаунда согласно (2) и (5).

С помощью изложенного метода было рассчитано температурное поле в слое компаунда без учета его оптических свойств. Для описанных выше температурных и атмосферных условий определены тепловые потери с поверхности стены, покрытой слоем компаунда ( $H = 0.5$  мм), при этом последний считался непрозрачным для излучения ( $\text{div } \mathbf{Q}_r(x) = 0$ ), а  $\epsilon_c = \epsilon_w = 0.95$ . Отметим, что в этом случае вместо (5) следует использовать граничное условие в виде (1), заменяя  $T_w$  на  $T(H)$ . Расчет показал, что при рассматриваемых условиях (безветренная погода, ясное либо облачное ночное небо,  $T_a = (-15)\text{--}(-20)$  °С,  $T_w = (-10)\text{--}(+10)$  °С)

перепад температуры по слою ( $\Delta T = T_w - T(H)$ ) не превышает  $1^\circ\text{C}$ , а относительное снижение тепловых потерь по сравнению с непокрытой стенкой ( $\Delta q = (1 - q/q_0) \cdot 100\%$ ) – 4%. Этого следовало ожидать, поскольку указанное покрытие существенно не повлияло ни на радиационный механизм теплопереноса, который определяет значительную долю тепловых потерь, ни на кондуктивный теплоперенос вследствие очень малой добавки к термическому сопротивлению слоя  $\Delta R_t$  ( $\Delta R_t = H/\lambda_c \approx 0.0042 \text{ м}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{Вт}$ ).

**Методика решения уравнения переноса излучения в слое компаунда.** К настоящему времени известно достаточно большое количество различных методов решения уравнения (6) с граничными условиями (8): методы Монте-Карло [11], приближения сферических гармоник [12] и радиационных элементов [13], метод характеристик [4], зональные методы [14] и т. д. Каждый из существующих методов имеет свои недостатки и ограничения относительно области применения. Одним из последних направлений в методике решения уравнения переноса излучения является комбинация методов дискретных ординат [15] и конечных разностей [16, 17] или конечных элементов [6, 18]. Популярность такого подхода объясняется относительной простотой вычислительного алгоритма и его совместимостью с расчетными схемами для других механизмов переноса энергии.

В настоящей работе используется новый подход [19, 20] к расчету задач переноса излучения, предполагающий использование при численном решении уравнения переноса (6) с граничными условиями (8) кусочно-аналитических (точнее – формальных аналитических) решений для  $x_m \leq x \leq x_{m+1}$ :

$$\begin{aligned} \mu > 0: \quad I_\lambda(x_{m+1}, \mu) &= \exp\left[-\int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{\beta(t)}{\mu} dt\right] \left( I_\lambda(x_m, \mu) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{Y(\mu, t)}{\mu} \exp\left(\int_{x_m}^t \frac{\beta(\tau)}{\mu} d\tau\right) dt \right), \\ \mu < 0: \quad I_\lambda(x_m, \mu) &= \exp\left[-\int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{\beta(t)}{\mu} dt\right] \left( I_\lambda(x_{m+1}, \mu) + \int_{x_{m+1}}^{x_m} \frac{Y(\mu, t)}{\mu} \exp\left(\int_{x_{m+1}}^t \frac{\beta(\tau)}{\mu} d\tau\right) dt \right), \\ \mu = 0: \quad I_\lambda(x_m, \mu) &= Y(\mu, x_m)/\beta(x_m), \quad I_\lambda(x_{m+1}, \mu) = Y(\mu, x_{m+1})/\beta(x_{m+1}), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $Y(\mu, x)$  – правая часть уравнения (6);  $\beta(x) = \chi(x) + \sigma(x)$  – коэффициент полного ослабления среды. Основой предлагаемого метода является комбинация методов дискретных ординат [15–18] и трассировки луча [20]. Интенсивность излучения определяется вдоль траектории луча с учетом оптических и геометрических свойств среды и граничной поверхности путем использования кусочно-аналитических решений уравнения (6). Для пространственной дискретизации расчетной области используется идеология метода конечных элементов [9, 21], что позволяет описывать сложные конфигурации и сохранять совместимость с расчетными схемами для других механизмов переноса энергии. В результате пространственной дискретизации получается некоторое число элементов разбиения и узлов  $N_{st}$ , в которых впоследствии рассчитываются интенсивности излучения.

Следуя методу дискретных ординат, в диапазоне  $0 \leq \theta \leq \pi$  выделяем  $N_\theta$  направлений распространения излучения  $\theta_j$  ( $\mu_j = \cos \theta_j$ ,  $1 \leq j \leq N_\theta$ ), вдоль которых рассчитывается поле излучения. Для каждого из этих направлений (6) принимает вид

$$\mu_j \frac{\partial}{\partial x} I_j(x) + \beta(x) I_j(x) = Y_j(x), \quad (12)$$

где  $I_j(x)$  – интенсивность излучения в точке  $x$  в направлении  $\theta_j$  ( $1 \leq j \leq N_\theta$ ). С учетом (11) решение (12) в слое получается суперпозицией решений для участков трассы луча внутри каждого элемента  $\Delta_m = x_{m+1} - x_m$ . Расчетные формулы для вычисления (11) внутри элементов строятся исходя из особенностей конкретной задачи. Точность интерполяции  $\beta(x)$  и  $Y_j(x)$  выбирается в зависимости от степени неоднородности среды. Так, например, в случае линейной интерполяции указанных величин на  $m$ -ом отрезке рекуррентная расчетная формула для вычисления  $I_{m+1,j} = I_j(x_{m+1})$  при  $\mu_j > 0$  может быть записана следующим образом:

$$I_{m+1,j} = \begin{cases} \left( I_{mj} - \frac{Y_{mj}}{\beta} + \mu_j \frac{Y_{m+1,j} - Y_{mj}}{\beta^2 \Delta_m} \right) \exp\left[-\frac{\tilde{\beta} \Delta_m}{\mu_j}\right] + \frac{Y_{m+1,j}}{\beta} - \mu_j \frac{Y_{m+1,j} - Y_{mj}}{\beta^2 \Delta_j}, & \tilde{\beta} \Delta_m \geq 10^{-5}; \\ I_{mj} + \frac{\Delta_m}{2\mu_j} (Y_{m+1,j} + Y_{mj}), & \tilde{\beta} \Delta_m < 10^{-5}, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\beta = (\beta_{m+1} + \beta_m)/2$ . Расчетная формула для  $\mu_j < 0$  получается из (13) заменой знака при  $\Delta_m$  на противоположный. Для вычисления интегрального члена в правой части (6) в  $m$ -ом узле расчетной области для  $j$ -го направления используется формула трапеций. Начальные значения интенсивности излучения для рекуррентной формулы (13) вычисляются из граничных условий (8) и с учетом проведенных дискретизаций имеют вид

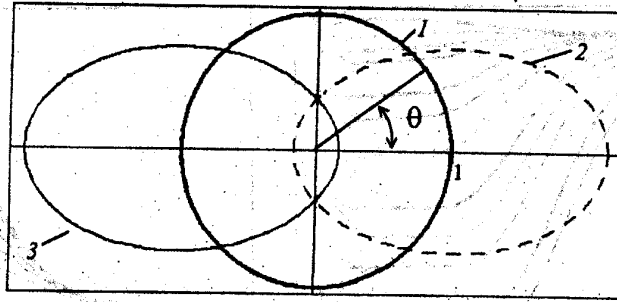


Рис. 2. Модельные индикатрисы рассеяния  $p(\mu, \mu')$ : 1 - сферическая ( $b = 0$ ); 2 - направленная вперед ( $b = 0.4$ ); 3 - направленная назад ( $b = -0.4$ )

$$I_{ij} |_{\mu_j > 0} = \epsilon_w B_\lambda(T_w) + (1 - \epsilon_w) \sum_{i=1}^{N_\theta - 1} (I_{1i} \vartheta_i + I_{1,i+1} \vartheta_{i+1}) |\mu_{i+1} - \mu_i|,$$

$$I_{N_\theta j} |_{\mu_j < 0} = B_\lambda(T_{r.g}), \quad \text{где } \vartheta_i = \begin{cases} \mu_i, & \mu_i \leq 0, \\ 0, & \mu_i > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Используя эти соотношения, можно найти поле интенсивностей излучения во всех точках расчетной области для всех направлений. Но поскольку задача нелинейная (правая часть уравнения переноса и граничные условия в свою очередь также зависят от интенсивности), алгоритм решения является итерационным, т. е. упомянутое поле последовательно уточняется для каждой длины волны. Алгоритм решения имеет следующую структуру:

1. Задаются исходные значения интенсивности. В частности, можно положить  $I_{ij} = 0$  для всех узлов сетки и направлений распространения излучения;
2. В соответствии с формулами (14) вычисляются граничные условия;
3. Для каждого из выбранных направлений распространения излучения  $j = 1, \dots, N_\theta$  вычисляются  $I_{ij}$  в каждом узле расчетной области ( $i = 1, \dots, N_{st}$ ). Одновременно рассчитывается величина относительной погрешности совпадения указанных величин для последовательных итераций;
4. Если заданная точность не достигается, то расчет повторяется с пункта 2.

В результате выполнения описанной процедуры получаем базовый набор  $I_{ij}$  для нахождения спектральных интегральных членов в выражении для дивергенции лучистых потоков (7) и плотности результирующего радиационного потока  $q_r$  с поверхности слоя для рассчитываемой длины волны, определяемого согласно (9). Повторив эти вычисления для всех рассматриваемых длин волн, получим значения радиационных источников тепла  $\text{div } Q_r(x)$  и величину  $q_r$ .

С помощью изложенных методик решения уравнений переноса излучения и теплопроводности была решена задача (3)–(9) по расчету характеристик радиационно-кондуктивного теплопереноса в слое компаунда ( $H = 0.5$  мм) с вариацией оптических характеристик последнего. Проведен анализ влияния оптических свойств компаунда ( $\chi$ ,  $\sigma$  и  $\rho_\lambda$ ) на величину результирующего радиационного потока с его свободной поверхности. Для обобщения результатов использованы два дополнительных параметра: оптическая толщина среды  $t_2 = \chi H$ , характеризующая ее поглощательные свойства, и критерий Шустера  $Sc = \sigma / (\chi + \sigma)$ , тождественный используемой в литературе вероятности выживания фотона и определяющий долю рассеяния в процессе ослабления излучения объемом компаунда. Влияние анизотропии рассеяния исследовалось при помощи модельной индикатрисы рассеяния Хеньи–Гринштейна [22]:

$$p(\mu, \mu') = \frac{1 - b^2}{\left(1 + b^2 - 2b \left[\mu\mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)}\right]\right)^{3/2}}, \quad (15)$$

где  $-1 < b < 1$  – фактор асимметрии,  $\cos \theta = \mu\mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)}$ . На рис. 2 приведены графики индикатрис для изотропного, направленного преимущественно вперед и преимущественно назад рассеяния, которым соответствуют описанные ниже результаты расчета.

Детальное исследование влияния оптических свойств поглощающей, излучающей и рассеивающей двухфазной среды и ее границ на характеристики радиационного энергопереноса можно найти в [6, 18, 23]. Поэтому ниже мы остановимся только на основных результатах математического моделирования, существенных для изучаемой в данной работе проблемы. Расчет показывает, что с увеличением доли процессов рассеяния плотность потока излучения с поверхности компаунда существенно уменьшается для сферической и направленной назад индикатрис рассеяния, а для направленной вперед – увеличивается. Для сильно рассеивающего компаунда, нанесенного на стену с высокой степенью черноты (рис. 3, а), увеличение его

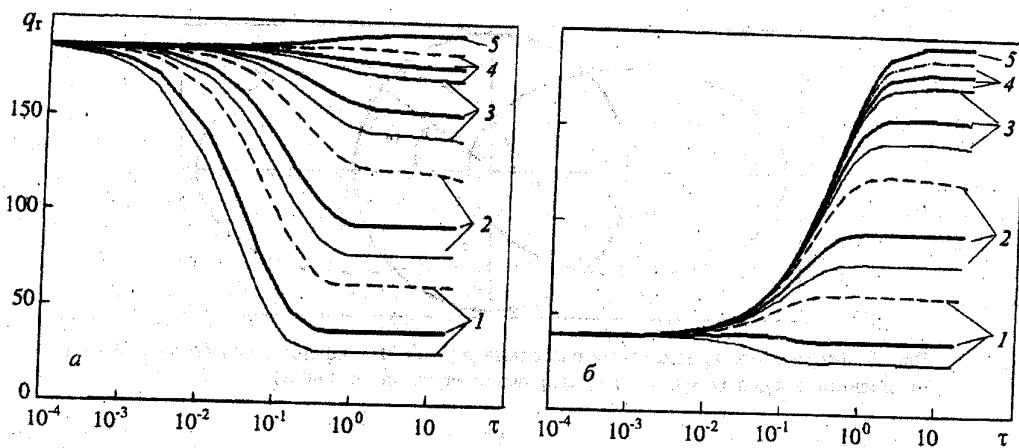


Рис. 3. Изменение радиационного потока с поверхности компаунда при ясном ночном небе в зависимости от его оптических свойств для  $\epsilon_w = 0.95$  (а) и  $0.2$  (б),  $T_w = 0$  °С,  $T_a = -20$  °С: 1 -  $Sc = 0.98$ ; 2 -  $0.9$ ; 3 -  $0.6$ ; 4 -  $0.3$ ; 5 -  $0$ . Разные типы линий соответствуют различным индикатрисам рассеяния на рис. 2.  $q_r$ , Вт/м<sup>2</sup>;  $\tau$  - безразмерная величина

оптической толщины приводит к нелинейному уменьшению плотности потока радиационных, а значит, и общих потерь. Если собственная излучательная способность стены невысока (рис. 3, б), то указанный эффект может вообще не проявляться или даже инвертироваться, т. е. радиационный поток будет возрастать. Отметим, что для направленной вперед индикатрисы рассеяния радиационный поток с поверхности компаунда уменьшается медленнее, чем для направленной назад, т. е. в последнем случае слой обладает более высокой отражательной способностью (рис. 3). Важным является и то обстоятельство, что радиационный поток с поверхности окрашенной стены достигает постоянного значения уже при оптической толщине покрытия порядка  $0.2$  (рис. 3, а).

Представленные результаты показывают, что оптические свойства полупрозрачных гетерогенных сред, к которым относятся компаунды из полых керамических микросфер, существенно влияют на радиационный поток. Это свидетельствует о целесообразности разработки и применения таких сред как для теплоотражающих, так и для неотражающих покрытий там, где последние необходимы.

**Методика расчета оптических характеристик слоя компаунда.** Процесс рассеяния излучения наиболее интенсивно происходит в оптически неоднородных средах, когда имеются достаточно большие градиенты показателя преломления. В большинстве случаев эти градиенты возникают при наличии в рассеивающем объеме частиц с показателем преломления, отличным от показателя преломления среды.

Рассеяние ИК (теплого) излучения ( $0.7-75$  мкм) на сферах диаметром  $0.01-100$  мкм может существенно изменить передачу тепла в слое. Как уже отмечалось выше, в этом случае для правильного описания процессов радиационного теплообмена необходимо дополнительно использовать интегродифференциальное уравнение переноса излучения, в которое входят оптические характеристики элементарного объема слоя:  $\Phi_\lambda$ ,  $\chi_\lambda$  и  $\rho_\lambda(\mu, \mu')$ . Эти характеристики зависят от размера сфер (в простейшем случае от радиуса  $a$ ), расстояния между ними  $d$ , комплексных показателей преломления среды и сфер и длины волны рассеиваемого излучения. Необходимо учитывать также и дисперсию показателя преломления, т. е. его зависимость от длины волны падающего излучения. В данной работе использовались показатели преломления частиц стекла в воздухе и воздушных полостей внутри стекла в ИК диапазоне, взятые из [24].

Задача о рассеянии света на сфере была решена аналитически в начале XX века. Решение уравнений Максвелла для этого случая, носящее название решения Ми, было получено в виде бесконечных сходящихся рядов (см., например, [25]). Использование этого решения для описания рассеяния излучения какой-либо средой, содержащей включения (частицы), возможно только тогда, когда рассеяние на частицах происходит независимо. Это означает, что расстояния между ними должно быть гораздо больше, чем их размер и длина волны. Для большинства оптических задач такое предположение справедливо. Рассматриваемое в этой работе композиционное покрытие является эффективным только при достаточно высокой объемной концентрации микросфер ( $\sim 40-50\%$ ), вследствие чего не выполняется условие независимого рассеяния излучения. Поэтому использование результатов классической теории Ми в этом случае может привести к существенным ошибкам при расчете соответствующих характеристик. Отметим, что при исследовании плотных упаковок частиц следует проявлять осторожность и в использовании уравнения переноса излучения. Так, при рассмотрении задач, связанных с анализом структуры излучения, его в большинстве случаев применять нельзя [26]. Если же речь идет об интегральных (по углу) характеристиках светового поля, то это уравнение можно использовать, корректно определив при этом параметры  $\epsilon$ ,  $\sigma$  и  $\rho_\lambda$  [26].

В работе [27] решена задача рассеяния излучения двумя сферическими частицами, расположенными близко друг к другу. Интересующие нас функции рассеяния излучения в среде с показателем преломления  $n$ , согласно [27], имеют следующий вид:

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [M_n \pi_n(\cos \theta) + N_n \tau_n(\cos \theta)],$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [M_n \tau_n(\cos \theta) + N_n \pi_n(\cos \theta)], \quad (16)$$

где парциальные коэффициенты определяются выражениями

$$M_n = \frac{\zeta'_n(kd) [\psi_n(ka) \psi'_n(m_b ka) - m_b \psi_n(m_b ka) \psi'_n(ka)]}{kd [\zeta_n(ka) \psi'_n(m_b ka) - m_b \psi_n(m_b ka) \zeta'_n(ka)],}$$

$$N_n = \frac{\zeta_n(kd) [\psi_n(ka) \psi'_n(m_b ka) m_b - \psi_n(m_b ka) \psi'_n(ka)]}{kd [\zeta'_n(ka) \psi'_n(m_b ka) m_b - \psi_n(m_b ka) \zeta_n(ka)]} \quad (17)$$

Здесь  $k = 2\pi m_b / \lambda$ ,  $\pi_n(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta} P_n(\cos \theta)$ ,  $\tau_n(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta)$ ,  $P_n(\cos \theta)$  — полиномы Лежандра вещественного аргумента;  $\psi_n$  и  $\zeta_n$  — функции Риккати-Бесселя (штрихами обозначены их производные).

От классического решения Ми выражения (17) отличаются множителями  $\zeta'_n(kd)$  и  $\zeta_n(kd)$ , учитывающими сферичность рассеянных волн, т. е. фактически влияние плотной упаковки частиц на процесс рассеяния.

В соответствии с [25] дифференциальное сечение рассеяния для частиц в единичном телесном угле для единичного неполяризованного падающего потока излучения имеет вид

$$d\sigma_s(\theta) = \frac{1}{2|k|^2} (|S_1|^2 + |S_2|^2) d\omega. \quad (18)$$

Интегрируя (18) по всему телесному углу  $4\pi$ , можно получить коэффициент рассеяния для отдельной частицы  $\sigma_s$ :

$$\sigma_s = \int_{4\pi} d\sigma_s(\theta) = \frac{1}{2|k|^2} \int_{4\pi} (|S_1|^2 + |S_2|^2) d\omega. \quad (19)$$

Этот коэффициент, отнесенный к геометрическому сечению частицы, определяет фактор эффективности рассеяния [27] с учетом расстояния между частицами

$$K_\sigma = \frac{\sigma_s}{\pi a^2} = \frac{2S'}{|p|^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [|M_n|^2 + |N_n|^2], \quad (20)$$

где  $\rho = ka = 2\pi m_b a / \lambda$ ,  $\rho' = \pi d / \lambda$ ,  $S' = 1 - |\rho| / |\rho'|$  (для решения Ми величина  $S' = 1$ ). Далее в соответствии с оптической теоремой ослабления можно получить фактор ослабления излучения частицей с учетом расстояния между частицами

$$K_\beta = \frac{2S'}{|x|^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re} \{M_n + N_n\} \quad (21)$$

Фактор поглощения равен разности факторов ослабления и рассеяния

$$K_\chi = K_\beta - K_\sigma. \quad (22)$$

Последняя из необходимых характеристик — индикатриса рассеяния, нормированная на полный телесный угол  $4\pi$ , может быть получена следующим образом:

$$p(\mu, \mu') = \frac{2}{|p|^2 K_\sigma} [|S_1(\theta)|^2 + |S_2(\theta)|^2]. \quad (23)$$

После определения коэффициентов поглощения и рассеяния и индикатрисы рассеяния излучения для одной частицы интересующие нас оптические характеристики композита находятся следующим образом [8, 28]:

а) для монодисперсной системы частиц радиусом  $a$  и концентрацией  $N_0$  коэффициенты поглощения и рассеяния соответственно равны

$$\chi = \pi a^2 K_\chi(m, \lambda, a, d) N_0. \quad (24)$$

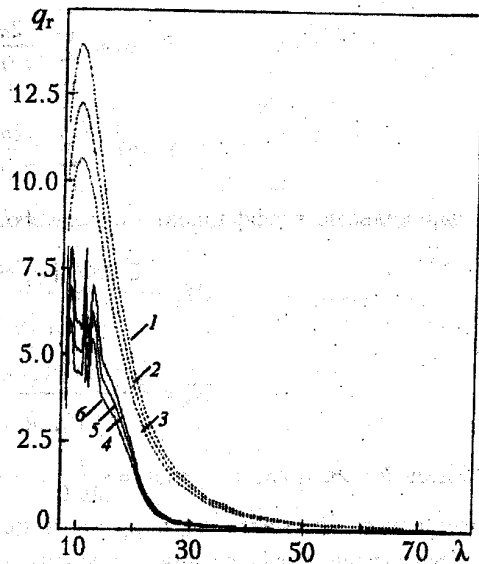
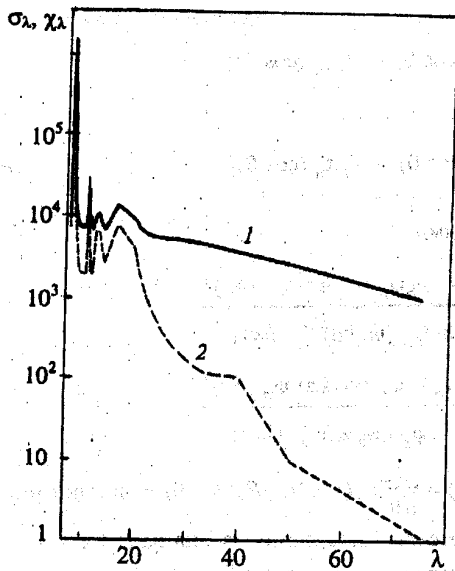


Рис. 4. Спектральные коэффициенты поглощения  $\sigma_\lambda$  (1) и рассеяния  $\chi_\lambda$  (2) компаунда "керамические микросферы-связующее".  $\sigma_\lambda, \text{м}^{-1}$ ;  $\chi_\lambda, \text{м}^{-1}$ ;  $\lambda, \text{мкм}$

Рис. 5. Спектральные плотности потока излучения с поверхности "голой" (1-3) и покрытой компаундом (4-6) стены в ясную безветренную ночь при  $T_a = -20^\circ\text{C}$  и  $T_w = 0^\circ\text{C}$  (1 и 4);  $-5^\circ\text{C}$  (2 и 5);  $-10^\circ\text{C}$  (3 и 6).  $q_r, \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{мкм})$ ;  $\lambda, \text{мкм}$

$$\sigma = \pi a^2 K_\sigma(m, \lambda, a, d) N_0, \quad (25)$$

а индикатриса рассеяния определяется выражением (23);

б) в случае полидисперсной системы вместо размера отдельной частицы в рассмотрение вводится функция распределения частиц по размерам. Все радиационные характеристики такой системы должны усредняться по данной функции распределения.

**Расчет теплозащитных свойств компаунда "керамические микросферы-связующее".** Рассчитаем на основе предложенной математической модели полный тепловой поток с поверхности стены ( $\epsilon_w = 0.95$ ), покрытой теплозащитным покрытием "керамические микросферы-связующее", для указанных выше температурных и атмосферных условий со следующими параметрами компаунда: средний диаметр микросфер — 35 мкм, их концентрация в слое компаунда  $N_0 = 2.5 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ , а среднее расстояние  $d$  между ними 40 мкм.

Расчет показал (рис. 4), что оптические свойства компаунда, а следовательно, и плотность радиационного потока с его поверхности зависят от длины волны излучения. Это подтверждают результаты, приведенные на рис. 5, где изображены спектральные плотности радиационного потока с поверхности компаунда при ясном ночном небе в сравнении с теми же величинами для "голой" стены, которая имеет практически постоянную степень черноты в рассматриваемом спектральном диапазоне. Для упрощения анализа результатов для компаунда вводится понятие эффективной степени черноты, которая равна отношению интегрального радиационного потока с поверхности компаунда (9) к интегральному радиационному потоку с поверхности абсолютно черного тела (1).

$$\epsilon_c = \frac{q_r}{\sigma_0 (T_w^4 - T_{r,g}^4)} \quad (26)$$

Эффективная степень черноты компаунда является сложной функцией, зависящей от геометрической толщины слоя компаунда, размера и концентрации микросфер, температуры и степени черноты стены, на которую наносится компаунд, и условий облучения компаунда, т. е. состояния окружающей среды: температуры воздуха, облачности, наличия других излучающих объектов (солнца, близко стоящих зданий и т. п.). Так, например, для результатов, представленных на рис. 5, эффективная степень черноты компаунда равна приблизительно 0.4, а для облачного неба (при сохранении всех прочих условий) она уменьшается и становится равной 0.3. Данная эффективная характеристика убывает также при уменьшении температурного перепада между поверхностью стены и окружающим воздухом. Таким образом, расчеты показали, что в описанных выше условиях исследуемое композиционное покрытие может снизить полные тепловые потери более чем на 40% (рис. 6).

**Эксперимент.** Для проверки применимости изложенной выше математической модели расчета теплоизоляционных свойств компаунда "керамические микросферы-связующее" проведена серия экспериментов в НИИ Строительных материалов (г. Минск).



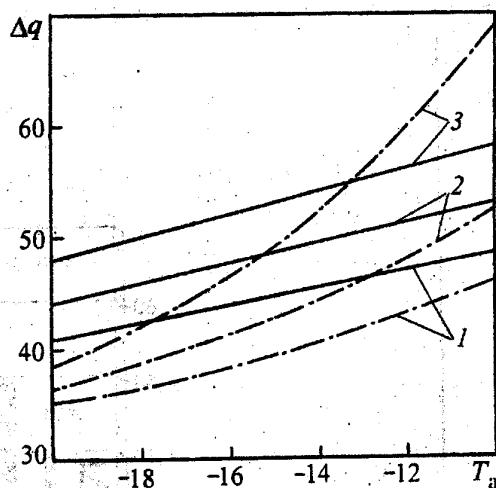


Рис. 6. Относительное уменьшение тепловых потерь с поверхности стены ( $\epsilon_w = 0.95$ ), покрытой компаундом "керамические микросферы-связующее", по сравнению с "голой" стеной в безветренную погоду при ясном (сплошные линии) и облачном (штриховые линии) ночном небе для различных температур поверхности стены:  $T_w = 0$  °C (1);  $-5$  °C (2);  $-10$  °C (3).  $\Delta q$ , %;  $T_a$ , °C

Прежде всего, экспериментально определялась доля теплового излучения в общих тепловых потерях с поверхности стены. На внешней поверхности северной стены здания симметрично закреплялись два измерителя плотности теплового потока, на один из которых плотно приклеивалась алюминиевая фольга толщиной 0.1 мм. Ночью с 29-го на 30-е июня была произведена запись показаний датчиков теплового потока (тепломеров) и температур стены и наружного воздуха. Результаты измерений следующие: а) средняя температура стены за время с 21.00 до 5.00 равнялась  $T_w = 12.5$  °C; б) средняя температура наружного воздуха за тот же период времени составила  $T_a = 11.5$  °C; в) средние плотности теплового потока с покрытого фольгой ("фольгированного") и "нефольгированного" тепломеров были равны  $q_f = 13.5$  Вт/м<sup>2</sup> и  $q_{nf} = 39.1$  Вт/м<sup>2</sup> соответственно. Как видно из результатов эксперимента, тепловые потери сократились практически в три раза и, поскольку собственное термическое сопротивление алюминиевой фольги ничтожно мало, можно сделать вывод об изменившихся в этом случае условиях теплообмена поверхности стены с окружающим пространством. Данная экспериментальная ситуация была промоделирована численно с помощью разработанной математической модели. Излучательная способность алюминиевой фольги при этом выбиралась равной  $\epsilon = 0.25$ . Результаты моделирования ( $q_f = 13.5$  Вт/м<sup>2</sup>,  $q_{nf} = 38.7$  Вт/м<sup>2</sup>) практически совпали с экспериментальными.

Во второй части экспериментального исследования в климатической камере проводилось измерение плотности теплового потока с поверхности фрагмента стены, половина которого была окрашена теплозащитным компаундом. Физические условия эксперимента были следующими: а) в холодной части климатической камеры температура воздуха поддерживалась равной  $T_a = -27 \pm 1$  °C; б) средние температуры окрашенной и неокрашенной поверхностей стены были равны  $T_{w,p} = -16.4$  °C и  $T_{w,np} = -18.2$  °C соответственно. Средние плотности теплового потока с окрашенной и неокрашенной поверхностями стены оказались равными  $q_p = 57.5$  Вт/м<sup>2</sup> и  $q_{np} = 70.6$  Вт/м<sup>2</sup> соответственно. Для расчета плотностей теплового потока по математической модели дополнительно вводились ограничения: а) полусферическая излучательная способность неокрашенной поверхности стены принималась равной  $\epsilon_w = 0.95$ ; б) полагалось, что  $T_{г,г} = T_a$ , поскольку климатическая камера является замкнутым пространством; в) объемная концентрация микросфер в компаунде задавалась равной 50%. Результаты расчета, представленные на рис. 7 и 8, хорошо совпадают с экспериментальными данными: ошибка не превышает 3%. Расчет показал (рис. 7), что в упомянутых теплофизических условиях эксперимента  $\epsilon_c \approx 0.3$ , что является следствием существенного сокращения плотности радиационного потока с поверхности стены.

Следует отметить, что еще более существенное уменьшение радиационного потока наблюдается при испытании покрытия в натуральных условиях, когда имеет место радиационный обмен энергией с небосводом. Оценка погрешности, вносимой климатической камерой и обусловленной отливом температуры небосвода ( $T_r = -73$  °C = 200 К) от температуры холодной части климатической камеры, показала, что в натуральных условиях исследуемое покрытие приводит к уменьшению тепловых потерь для указанных климатических условий приблизительно на 40%.

В заключение отметим, что с уменьшением объемной концентрации керамических микросфер в компаунде теплозащитные свойства покрытия уменьшаются и уже при концентрациях менее 15% оно практически перестает оказывать влияние на структуру и величину тепловых потерь, превращаясь в обычную краску.

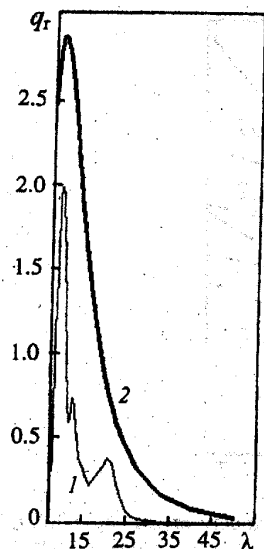


Рис. 7. Спектральная плотность радиационного потока с поверхности стены: 1 – окрашенная компаундом поверхность; 2 – неокрашенная поверхность.  $q_r$ , Вт/( $m^2 \cdot \mu m$ );  $\lambda$ ,  $\mu m$

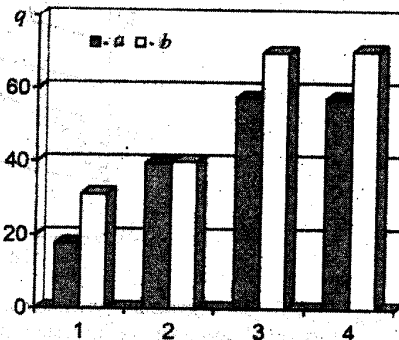


Рис. 8. Структура и величины тепловых потерь с поверхности фрагмента стены в условиях климатической камеры: 1 – радиационные потери (расчет); 2 – конвективные потери (расчет); общие тепловые потери: 3 – расчет; 4 – эксперимент; а – окрашенная стена; б – неокрашенная стена.  $q$ , Вт/ $m^2$

### Выводы

1. Покрытия, представляющие собой компаунд из связующего и полых керамических микросфер, являются эффективным средством дополнительной теплозащиты ограждающих конструкций.

2. Количественно теплозащитный эффект композиционного покрытия "керамические микросферы-связующее" в силу физического принципа его работы существенно зависит от оптических свойств подложки (стены), окружающей среды и температурного режима эксплуатации (в некоторых ситуациях теплозащитный эффект может инвертироваться).

3. Разработанная математическая модель и соответствующие компьютерные коды адекватно отражают реальный процесс теплопереноса и могут использоваться для расчета теплозащитных свойств покрытий, представляющих собой компаунд из связующего и полых керамических микросфер.

Авторы выражают благодарность чл.-кор. НАН Беларуси Н. В. Павлюкевичу за проведение плодотворных дискуссий в процессе выполнения работы.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант 2000-652).

### Обозначения

$T$  – температура;  $\epsilon$  – полусферическая излучательная способность;  $q$  – плотность теплового потока;  $H$  – толщина слоя компаунда;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\lambda$  – длина волны электромагнитного излучения;  $N$  – число узлов;  $\theta$  – угол между направлением распространения луча и осью  $Ox$ ;  $\mu = \cos \theta$ ;  $\theta'$  – угол между направлением рассеяния луча и осью  $Ox$ ;  $\mu' = \cos \theta'$ ;  $x$  – пространственная координата;  $I_\lambda(x, \mu)$  – спектральная интенсивность излучения на длине волны  $\lambda$  в точке  $x$  в направлении  $\theta$ ;  $\chi$  – коэффициент поглощения излучения в компаунде;  $\sigma$  – коэффициент рассеяния излучения в компаунде;  $p_\lambda(\mu, \mu')$  – индикатриса рассеяния излучения;  $m$ ,  $n$  – показатели преломления;  $K_\chi$ ,  $K_\beta$  и  $K_\sigma$  – коэффициенты поглощения, ослабления и рассеяния излучения частицей соответственно;  $Sc$  – критерий Шустера;  $\alpha$  – коэффициент конвективной теплоотдачи с поверхности;  $L$  – высота стены;  $Q_r$  – плотность радиационных потоков;  $\beta$  – коэффициент полного ослабления среды;  $\tau$  – оптическая толщина;  $\rho$  – дифракционный параметр микросфер;  $b$  – фактор асимметрии модельной индикатрисы рассеяния. Индексы:  $w$  – стена;  $r$  – радиационный;  $conv$  – конвективный;  $a$  – атмосфера;  $c$  – компаунд;  $b$  – связующее;  $g$  – поверхность земли;  $f$  – фольгированный;  $nf$  – нефольгированный;  $p$  – окрашенный;  $pr$  – неокрашенный;  $s$  – рассеяние;  $st$  – узел;  $t$  – термический;  $V$  – объемный;  $0$  – отсутствие слоя компаунда.

### Литература

1. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи. М., 1983.
2. Мартыненко О. Г., Соколович Ю. А. Свободно-конвективный теплообмен. Минск, 1982.
3. Лыков А. В. Теплообмен. М., 1978.
4. Адзериго К. С., Ноготов Е. Ф., Трофимов В. П. Радиационный теплообмен в двухфазных средах. Минск, 1987.

5. Fiveland W. A. // J. Heat Transfer. 1984. Vol. 106. Pp. 699-706.
6. Герман М. Л. Влияние оптических свойств двухфазной среды и граничной поверхности на радиационный теплообмен в топочных камерах: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1993.
7. Будов В. В. // Стекло и керамика. 1994. № 7. С. 7-11.
8. Блох А. Г., Журавлев Ю. А., Рыжков Л. Н. Теплообмен излучением. Справочник. М., 1991.
9. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. М., 1988.
10. Nogotov E. F. Application of Numerical Heat Transfer. N. Y., 1978.
11. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М., 1975. С. 795-804.
12. Menguc M. and Viskanta R. // JQSRT. 1985. Vol. 35. Pp. 533-549.
13. Maruyama S. and Aihara T. // Proc. First Int. Symp. on Radiation Transfer, Kusadasi, Turkey, 1995. Pp. 153-167.
14. Hottel N. C. and Sarofim A. F. Radiative Transfer. N. Y., 1967.
15. Chandrasekhar S. Radiative Transfer. N. Y., 1960.
16. Fiveland W. A. // J. Heat Transfer. 1987. Vol. 109. Pp. 809-812.
17. Truelove J. S. // JQSRT. 1988. Vol. 39. Pp. 27-31.
18. Герман М. Л., Некрасов В. П., Ноготов Е. Ф. // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 3. С. 122-126.
19. Герман Е. А., Герман М. Л., Некрасов В. П., Ноготов Е. Ф. // ИФЖ. 1996. Т. 69, № 6. С. 1014-1020.
20. Герман М. Л., Некрасов В. П., Ноготов Е. Ф. // Докл. АН Беларуси. 1998. Т. 42, № 1. С. 67-73.
21. Герман М. Л., Колесников П. М., Ноготов Е. Ф. // Междунар. конф. "Теплофизика-98". Обнинск, 1998. С. 301-308.
22. Ку-Нан Лиоу. Основы радиационных процессов в атмосфере. Л., 1984.
23. Martynenko O. G., German M. L., Nekrasov V. P., and Nogotov E. F. // Int. J. Heat Mass Transfer. 1998. Vol. 41, No. 17. Pp. 2697-2704.
24. Золотарев В. М., Морозов В. Н., Смирнова Е. В. Оптические постоянные природных и технических сред. Л., 1984.
25. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М., 1961.
26. Иванов А. П., Данилюк В. Г. // Оптика и спектроскопия. 1977. Т. 42, № 4. С. 739-746.
27. Рыжкова Т. П., Рыжков Л. Н. // Промышленная теплоэнергетика. 1983. Т. 1, № 3. С. 26-34.
28. Деймерджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М., 1971.